

HABILIDADES VISUALES ESPACIALES PARA LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS

SPATIAL VISUAL SKILLS FOR TEACHING AND LEARNING MATHEMATICAL CONCEPTS.

Estela de Lourdes Juárez Ruiz
Lidia Aurora Hernández Rebollar

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
Avenida San Claudio y 18 Sur, San Manuel, Ciudad Universitaria, C.P. 72570, Puebla, México
Departamento de Investigaciones en Ciencias Agrícolas (DICA)
Av San Claudio 1814, Jardines de San Manuel, 72570 Puebla, Pue.

(e-mail estela.juarez@correo.buap.mx, lidia.hernandez@correo.buap.mx)

Resumen

Una de las principales teorías de la educación matemática, establece que para que la comprensión de conceptos matemáticos sea efectiva, se requiere que el estudiante desarrolle diversas representaciones semióticas del objeto matemático en estudio, como son la gráfica, la simbólica y la numérica. Además, que sea capaz de trabajar dentro de cada una de ellas, así como de transitar entre las mismas por medio de conversiones con sentido, cuando realiza actividades o tareas. Específicamente, las representaciones gráficas requieren de habilidades visuales espaciales como reconocer figuras, reconstruirlas a partir de indicaciones verbales o escritas y manipularlas teniendo en cuenta los elementos de los que están formadas, entre otras. En este trabajo se presenta una descripción de habilidades visuales espaciales y cómo se pueden operacionalizar a través de descriptores para el diseño de actividades, problemas o tareas, para desarrollarlas en los estudiantes y coadyuvar en la representación gráfica de objetos matemáticos, para la mejora de los procesos de comprensión de los conceptos matemáticos.

Palabras clave:

Habilidad espacial, visualización, representación semiótica, representación gráfica.

Abstract

One of the main theories of mathematics education states that for the understanding of mathematical concepts to be effective, the student is required to develop various semiotic representations of the mathematical object under study, such as graph, symbolic and numerical. In addition, that student can work within each of them, as well as to move between them through conversions with meaning, when performing activities or tasks. Specifically, graphic representations require spatial visual skills such as recognizing figures, reconstructing them from verbal or written indications and manipulating them considering the elements of which they are formed, among others. This paper presents a description of spatial visual skills and how they can be operationalized through descriptors for the design of activities, problems, or tasks, to develop them in students and contribute to the graphic representation of mathematical objects, for the improvement of the processes of understanding mathematical concepts.

Palabras clave:
Spatial ability, visualization, graphic semiotic, graphic representation.

La visión es la facultad por excelencia del ser humano, pues el 90% de toda la información que llega a nuestro cerebro es de tipo visual (Cantón 2016). Desde el punto de vista neurológico, Adams y Victor (1993) afirman que

La mayor parte del cerebro está involucrada en la visión y en el control visual del movimiento, la percepción y la elaboración de palabras, y la forma y el color de los objetos. El nervio óptico contiene más de un millón de fibras, en comparación con 50,000 en el nervio auditivo. (p. 207) Cuando decimos que “una imagen vale más que mil palabras” es porque vivimos en un mundo en donde la información se transmite principalmente de forma visual, y las tecnologías informáticas apoyan y fomentan este tipo de comunicación.

La visión es la facultad por excelencia del ser humano, pues el 90% de toda la información que llega a nuestro cerebro es de tipo visual (Cantón 2016). Desde el punto de vista neurológico, Adams y Victor (1993) afirman que

La mayor parte del cerebro está involucrada en la visión y en el control visual del movimiento, la percepción y la elaboración de palabras, y la forma y el color de los objetos. El nervio óptico contiene más de un millón de fibras, en comparación con 50,000 en el nervio auditivo. (p. 207)

Cuando decimos que “una imagen vale más que mil palabras” es porque vivimos en un mundo en donde la información se transmite principalmente de forma visual, y las tecnologías informáticas apoyan y fomentan este tipo de comunicación.

1. Visión y visualización

Como seres biológicos y socioculturales, nos animamos y aspiramos a “ver” no solo lo que tenemos a la vista, sino también lo que somos incapaces de ver (Arcavi, 2003).

En el campo de la educación matemática existen dos formas de distinguir estos procesos, por me-

dio de los conceptos de “visión” y “visualización”, que se interpretan como diferentes. La visión hace referencia a la percepción visual, a las imágenes visuales. Consiste en dar acceso directo a cualquier objeto físico “en persona” y en aprehender simultáneamente varios objetos o un campo completo de ellos (Duval, 1999). De esta forma, está limitada por los sentidos y el campo visual del ojo.

Por otro lado, la visualización se basa en la producción de una representación semiótica, un sistema de signos que tiene como función principal la comunicación (Martínez y Hernández, 2016). Se enfoca en una forma sinóptica (que presenta las partes principales de un asunto de manera clara, rápida y resumida) a través de la organización de unidades particulares (Duval, 1999). Arcavi (2003) la define como:

Es la habilidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión de imágenes y diagramas, en nuestras mentes, en papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas. (p. 217)

2. La visualización y las matemáticas

Las matemáticas, como una creación humana y cultural, trata con objetos y entidades muy diferentes de los fenómenos físicos (como planetas o células sanguíneas), se basa en gran medida en la visualización, en sus diferentes formas y niveles (Arcavi, 2003).

Un ejemplo de estas diferencias las establece Fischbein (1993) en el campo de la geometría, estableciendo que, por ejemplo, los triángulos y los cuadrados, así como las otras figuras geométricas, son conceptos figurales ya que tienen propiedades tanto conceptuales como figurales. La componente conceptual se refiere a sus cualidades como idealidad, abstracción, generalidad, y perfección; y la componente figurial corresponde

a sus propiedades espaciales como forma, posición y tamaño. Decir en geometría que un punto no posee dimensiones es algo que posiblemente no podamos comprender si lo pensamos como fenómeno físico, pero en matemáticas tiene sentido porque más que las dimensiones, lo que importa es su localización, ya sea en un plano o en el espacio tridimensional.

Por otro lado, con respecto a las representaciones semióticas, resulta esencial su uso para tener acceso a los objetos matemáticos. Sin embargo, la creación de representaciones semióticas gráficas involucra específicamente su interrelación con la visualización, además de habilidades para plasmarla en una imagen externa como puede ser el papel. En síntesis, estos dos procesos, el de la visualización y el de las representaciones semióticas son el corazón de la comprensión de conceptos en matemáticas (Duval, 1999).

3. Las habilidades visuales espaciales en la psicología y en la educación matemática

Históricamente, las habilidades visuales espaciales se estudiaron primero en el campo de la psicología, a partir de la década de los años 80 del siglo XIX, con los estudios de Galton (1883), quien inició su estudio sistemático. Décadas después destacan los trabajos de Spearman (1927) y Thurstone (1938), quienes alrededor de los años 30 del siglo XX, ya utilizaban métodos estadísticos sofisticados tratando de identificar los componentes de la inteligencia humana entre los cuales estaban estas habilidades, pero ellos las llamaron capacidades visuoespaciales (ver Bishop 1980).

Los educadores matemáticos, por su parte, las empezaron a estudiar en los años 80 del siglo XX, siendo uno de los pioneros Alan Bishop (1980). La perspectiva desde la cual las abordaron fue muy diferente de la de los psicólogos, pues como él mismo lo describe:

Hay marcadas diferencias entre las preocupaciones del psicólogo del desarrollo y las preocupaciones del educador matemático [...] el primero está esencialmente interesado en el desarrollo “natural” del niño, mientras que el segundo, debido a su papel intervencionista, está esencialmente interesado en el desarrollo ‘antinatural’. (p. 261)

De esta manera, el educador matemático trata esencialmente de su desarrollo en los estudiantes y por ello es correcto llamarlas habilidades visuales espaciales. En efecto, la diferencia entre los términos “capacidad” y “habilidad” radica en sus raíces etimológicas. Por un lado, el término capacidad, en inglés *ability*, proviene del latín *habilitas* que significa aptitud. De esta forma, el término capacidad se refiere a las capacidades o talentos con los que nacemos como la capacidad de ver, oír, oler, caminar, etc. (Porten, 2008). Por su parte, Boaler (2014) define el término capacidad como una cierta cantidad de inteligencia que se cree poseen los individuos. En psicología, se considera que las capacidades son heredadas, relativamente fijas y medibles por pruebas (Krutetskii et al, 1976).

Asimismo, Porten (2008) describe que el término habilidad, *skill* en inglés, se remonta a la palabra nórdica antigua *skil* que significa distinción o discernimiento. Asimismo, también establece que la palabra alemana para habilidad, *Fertigkeit*, se deriva etimológicamente de *Fahrt*, que significa viaje en inglés y *fertig*, que significa completado. Esto significa que las habilidades se entienden como el resultado final de un proceso, en este caso, de un proceso de aprendizaje.

De esta forma, podemos concluir que las capacidades son un potencial, mientras que las habilidades se adquieren y desarrollan a través de la

experiencia y la práctica (Riggio, 2020). En este trabajo las llamaremos habilidades visuales espaciales, porque se busca promover su desarrollo en los estudiantes.

En resumen, desde que inició el estudio de estas habilidades por el educador matemático, se ha creído que es posible su desarrollo en los estudiantes. Uttal et al (2013), comprobaron que esto es viable a través de un metaanálisis de 217 estudios del tema mostrando que este tipo de pensamiento se puede mejorar en personas de todas las edades y a través de una amplia variedad de enfoques de capacitación, como el trabajo en un curso, la capacitación basada en tareas y por videojuegos. Los efectos del entrenamiento son estables a través del tiempo y estas habilidades son transferibles a otras tareas espaciales novedosas, aunque no hayan sido objeto de entrenamiento directamente.

4. Habilidades visuales espaciales en la actualidad y para la enseñanza

Los investigadores educativos han estudiado diversos aspectos de la visualización espacial, como por ejemplo: comprender las diferentes estrategias imaginativas utilizadas por los estudiantes; estudiar los efectos de las prácticas docentes destinadas a favorecer los procesos de visualización; desarrollar construcciones teóricas útiles para interpretar la percepción de los estudiantes sobre figuras geométricas y cómo esta percepción progresa en el aprendizaje de la geometría; o estudiar el valor epistemológico de la visualización y el descubrimiento en matemáticas (Miragliotta et al, 2017).

Hoy en día, no es posible proporcionar una definición de las habilidades visuales espaciales, debido a la heterogeneidad de la investigación, sin embargo, Cornoldi y Vecchi (2004), realizaron un esfuerzo para clasificarlas en el campo de la psicología. En este trabajo, se presenta su interpretación para la disciplina de la educación matemática realizada por Miragliotta et al (2017), como se presenta a continuación.

En la Tabla 1, se muestra en la primera columna, el nombre de la habilidad visual espacial, en la segunda, su definición según Miragliotta et al (2017) (cambiando el término capacidad por habilidad), y en la tercera, los descriptores para el tema de sólidos de revolución, aunque cualquier docente o investigador puede modificarlos dependiendo de su objeto de estudio o tema a enseñar. Cabe resaltar que en Miragliotta et al presentan tres habilidades más que no se describen en este trabajo.

Tabla 1. Habilidades visuales y sus descriptores para sólidos de revolución (definiciones de Miraglotta et al, 2017)

Habilidad visual	Definición	Descriptor
<i>Organización visual</i>	Habilidad para reconocer conceptos figurales a partir de representaciones incompletas o no perfectamente visibles.	<ul style="list-style-type: none"> - Identifica conceptos figurales planos y tridimensionales, a partir de representaciones gráficas incompletas o no perfectamente visibles.
<i>Escaneo visual</i>	Habilidad para reconocer las propiedades de una figura a partir de su representación.	<ul style="list-style-type: none"> - Reconoce las propiedades de una figura tridimensional a partir de su - Describe las propiedades de un sólido tridimensional a partir de su representación.
<i>Generación de la imagen</i>	Habilidad para reproducir en la mente el componente figural de un concepto figural, recuperándose de la memoria o generándolo de nuevo.	<ul style="list-style-type: none"> - Reproduce el componente figural de un sólido de revolución a partir de un enunciado escrito describiéndolo a través de representaciones verbales o gráficas
<i>Reconstrucción visual</i>	Habilidad para reconstruir el componente figural de un concepto figural en una representación dada, de forma autónoma o a partir de indicaciones escritas o verbales o representaciones parciales.	<ul style="list-style-type: none"> - Reconstruye representaciones gráficas de un concepto figural tridimensional a partir de indicaciones escritas.
<i>Manipulación de la imagen</i>	Habilidad para usar las propiedades de un concepto figural o de manipular los aspectos figurales de un concepto figural, teniendo en cuenta las relaciones teóricas entre las unidades figurales elementales de las que está compuesta. Esta habilidad está involucrada en tareas que requieren la manipulación mental de una figura para transformarla en una nueva.	<ul style="list-style-type: none"> - Construye representaciones gráficas de sólidos de revolución como resultado de la manipulación dinámica de figuras planas que giran alrededor de un eje de revolución.

5. Ejemplo de su aplicación

Como profesoras de matemáticas, las autoras de este trabajo han impartido en múltiples ocasiones materias de matemáticas que requieren de los estudiantes habilidades visuales espaciales para realizar representaciones gráficas, en particular en la asignatura de cálculo integral, en el tema de sólidos de revolución. Estos sólidos son figuras tridimensionales obtenidas por la rotación de alguna figura plana alrededor de una recta o eje de rotación.

Para evaluar la habilidad de generación de la imagen, se preguntó a estudiantes de cálculo integral: ¿Qué figura tridimensional se obtiene al hacer girar una circunferencia alrededor de una recta vertical que no la interseca? (Figura 1a). ¿Y qué figura tridimensional se obtiene si la figura a girar es un círculo? (Figura 1b).

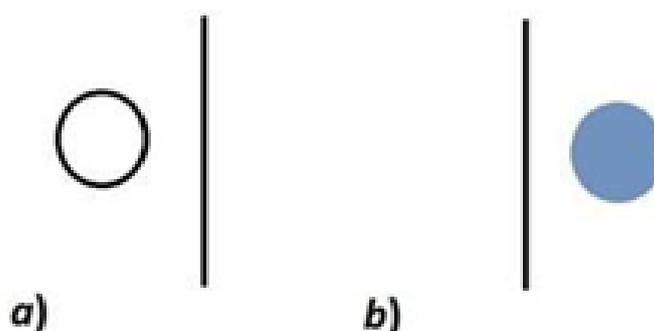


Figura 1. Esquema presentado a los estudiantes para evaluar la habilidad de generación de la imagen

Se presenta en la Figura 2, la respuesta de uno de los estudiantes, que ejemplifica las dificultades que tuvieron los estudiantes, pues sólo el 48% la respondieron correctamente (para más detalles, consultar Autor, et al, En prensa). Como se observa, considera que se forma una espiral al girar la circunferencia alrededor del eje de rotación (Figura 2 a), y un cilindro recto, cuando el círculo gira alrededor del eje de rotación (Figura 2 b). En ambos casos las respuestas son erróneas, lo que nos permite observar que el estudiante tiene problemas de visualización espacial, específicamente en la habilidad de generación de la imagen. Aunque sí realiza un proceso mental dinámico pues las figuras en su representación gráfica son tridimensionales, no logra percibir cuáles

figuras se forman: una dona hueca (llamado toro hueco) y una dona sólida (toro sólido), respectivamente.

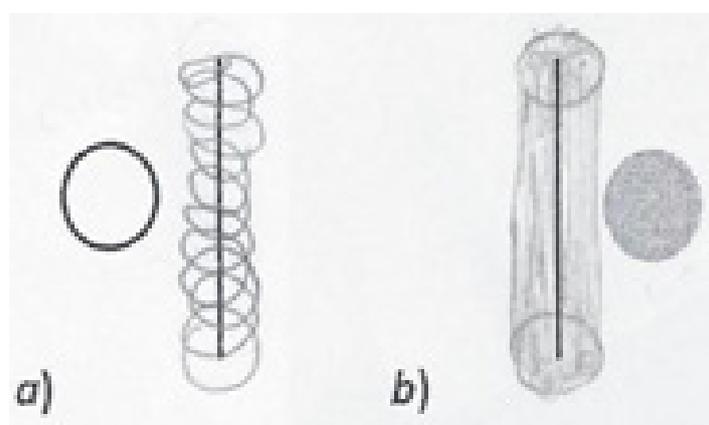


Figura 2. Respuesta de un estudiante en la evaluación de la habilidad generación de la imagen.

Este problema que se detecta en los estudiantes hace necesario diseñar actividades para el desarrollo de sus habilidades de visualización espacial, porque ¿cómo podemos enseñar temas de matemáticas específicos como el cálculo de volúmenes de sólidos de revolución si no pueden imaginarlos en primera instancia?

En síntesis, resulta necesario que los docentes de matemáticas reconozcan la necesidad de valorar y desarrollar habilidades visuales espaciales en sus estudiantes, en todos los niveles escolares. Esto redundará en una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en particular, y en un mejor desenvolvimiento en el espacio tridimensional en que vivimos.

6. Referencias

Adams, R.D., Victor, M. (1993). *Principles of Neurology* (5a ed.). McGraw-Hill.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241. <https://doi.org/10.1023/A:1024312321077>

Bishop, A. J. (1980). Spatial abilities and mathematics education-A review. *Educational Studies in Mathematics*, 11(3), 257–269. <https://doi.org/10.1007/BF00697739>

Boaler, J. (2014). Ability grouping in mathematics classrooms. In *Encyclopedia of mathematics education*, (pp. 1–5). Springer.

Galton, F. (1883). *Inquiries into the Human Faculty and its Development*. Macmillan.

Cantón C.J. (2016, 15 de octubre). ¿Qué es el pensamiento visual? Medialab. Universidad de Granada.

<https://medialab.ugr.es/blog-lineas-estrategicas/blog-sociedad-digital/que-es-el-pensamiento-visual/> Cornoldi, C., y Vecchi, T. (2004). *Visuo-spatial working memory and individual differences*. Psychology Press.

Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3–26.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24(2), 139–162. <https://doi.org/10.1007/BF01273689>

Krutetskii, V. A., Wirszup, I., y Kilpatrick, J. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. University of Chicago Press.

Martínez, M. M. E., y Hernández, R. L. A. (2016e). Importancia de las representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas.

SaberesyCiencias.<https://saberesyciencias.com.mx/2016/04/18/importancia-de-las-representaciones-semioticas-en-el-aprendizaje-de-las-matematicas/>

Miragliotta, E., Baccaglini-Frank, A., y Tomasi, L. (2017). *Apprendimento della geometria e abilità visuo-spaziali: un possibile quadro teorico e un'esperienza didattica. L'Insegnamento Della Matematica e Delle Scienze Integrate*, 40(B), 339–360.

Porten, D. (2008). Skills. In: Erlhoff M., Marshall T. (Eds) *Design Dictionary*. Board of International Research in Design. Birkhäuser Basel. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/978-3-7643-8140-0_250

Riggio, R.E. (2020) Skills. In: Zeigler-Hill V., Shackelford T.K. (Eds) *Encyclopedia of Personality and Individual Differences*. Springer, Cham. https://doi-org.proxydgb.buap.mx/10.1007/978-3-319-24612-3_1911

Spearman, C. E. (1927). *The Abilities of Man: Their Nature and Measurement*. Macmillan.

Thurstone, L. L. (1938). *Primary mental abilities*. University of Chicago Press.

Uttal, D. H., Meadow, N. G., Tipton, E., Hand, L. L., Alden, A. R., Warren, C., y Newcombe, N. S. (2013). The malleability of spatial skills: A meta-analysis of training studies. *Psychological Bulletin*, 139(2), 352–402. <https://doi.org/10.1037/a0028446>